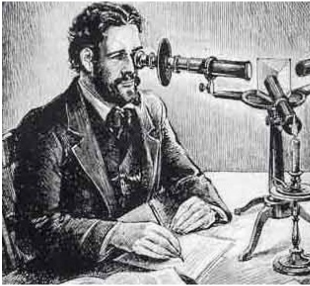
Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Wykład 14,15

Algebry Banacha i widmo

$$\text{algebra} \;\equiv\; \left(\begin{array}{c} \text{przestrzeń liniowa} + \\ \text{pierścień} + \text{łączność} \end{array} \right)$$



Motywacja. Przestrzeń liniowych operatorów ograniczonych $B(X)$ na przestrzeni Banacha X jest algebrą z mnożeniem zdefiniowanym jako złożenie operatorów:

$$T, S \in B(X) \implies T \circ S \in B(X) \text{ oraz } \|T \circ S\| \leqslant \|T\| \cdot \|S\|$$

Co więcej operator identycznościowy $1 \in B(X)$ jest jedynką w tej algebrze: $1 \circ T = T \circ 1 = T$, oraz $\|1\| = 1$.

Def. Algebrą Banacha nazywamy algebrę A, czyli przestrzeń liniową wraz z operają mnożenia $\cdot : A \times A \to A$, która jest dwulinowa i łączna, taką, że A jest przestrzenią Banacha oraz norma jest submultiplikatywna, tzn.

$$\|a \cdot b\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|, \qquad a, b \in A.$$

Jeśli mnożenie w A posiada element neutralny, to nazywamy go **jedynką** algebry i oznaczamy 1. Zakładamy wtedy, że $\|1\| = 1$. Algebra A jest **przemienna**, jeśli mnożenie w A jest przemienne.

Prz. Algebry operatorów ograniczonych na przestrzeni Banacha X

$B(X)$ jest algebrą Banacha z 1 (nieprzemienną jeśli $\dim(X) > 1$).
Każda domknięta podalgebra $A \subseteq B(X)$ jest algebrą Banacha.

Prz. Algebry funkcji ciągłych na przestrzeni zwartej M

Przestrzeń $C(M)$ z normą $\|a\|_\infty = \sup_{t \in M} |x(t)|$ jest przemienną algebrą Banacha z mnożeniem zdefiniowanym punktowo

$$(a \cdot b)(t) := a(t)b(t), \qquad a, b : M \to \mathbb{F}.$$

Funkcja tożsamościowo równa 1 jest jedynką w $C(M)$.

Prz. Algebra z mnożeniem zerowym

Na dowolnej przestrzeni Banacha X można zdefiniować mnożenie wzorem $x \cdot y := 0$ dla $x, y \in X$. Wtedy X jest algebrą Banacha.
Jest to algebra przemienna bez jedynki (ekstremalny przykład).

Od tej pory zakładamy, że

rozważane przez nas algebry Banacha mają jedynkę!

Def. Zbiór elementów odwracalnych w A oznaczamy przez

$$\mathrm{Inv}(A) := \{a \in A : \exists_{b \in A}\ ab = ba = 1\}.$$

Jeżeli $a \in \mathrm{Inv}(A)$ i $b \in A$ spełniają $ab = ba = 1$ to piszemy $b = a^{-1}$ i nazywamy go **elementem odwrotnym** do a.

Uw. $\mathrm{Inv}(A)$ tworzy grupę, której elementem neutralnym jest $1 \in A$

$$a, b \in \mathrm{Inv}(A) \implies \begin{cases} a^{-1} \in \mathrm{Inv}(A) \text{ oraz } (a^{-1})^{-1} = a, \\ ab \in \mathrm{Inv}(A) \text{ oraz } (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}. \end{cases}$$

Prz. Jeśli $A = B(X)$, gdzie X to przestrzeń Banacha, to

$$\mathrm{Inv}(B(X)) = \{T \in B(X) : T : X \to X \text{ bijekcja}\}.$$

Prz. Jeśli $A = C(M)$, gdzie M przestrzeń zwarta, to

$$\mathrm{Inv}(C(M)) = \{a \in C(M) : a(t) \neq 0 \text{ dla każdego } t \in M\}.$$

Lemat Neumanna

Niech A będzie algebrą Banacha z jedynką $1 \in A$.

$$\forall_{a \in A} \ \|a\| < 1 \implies 1 - a \in \mathrm{Inv}(A) \text{ oraz } (1-a)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k.$$

Dowód: Niech $\|a\| < 1$ i połóżmy $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$. Dla $m > n$

$$\|S_m - S_n\| = \|\sum_{k=n+1}^{m} a^k\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} \|a^k\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|a\|^k = \frac{\|a\|^{n+1}}{1 - \|a\|} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Czyli $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchy w A. Zatem szereg $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{n\to\infty} S_n$ jest zbieżny w A. Skoro $\|a^n\| \leqslant \|a\|^n \to 0$, to $a^n \to 0$ i stąd

$$(1-a)\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{n\to\infty} (1-a)\sum_{k=0}^{n} a^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^{k+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - a^{n+1} = 1.$$

Analogicznie $\sum_{k=0}^{\infty} a^k (1-a) = 1$. Stąd $(1-a)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k$. ■

Wn. $\{a \in A : \|1 - a\| < 1\} \subseteq \mathrm{Inv}(A)$.

Dowód: Jeśli $\|1 - a\| < 1$, to $a = 1 - (1 - a) \in \mathrm{Inv}(A)$. ■

Tw. Dla każdej algebry Banacha A zbiór $\mathrm{Inv}(A)$ jest otwarty w A i odwzorowanie $\mathrm{Inv}(A) \ni a \mapsto a^{-1} \in \mathrm{Inv}(A)$ jest różniczkowalne.

Dowód: 

Def. Widmem (spektrum) elementu $a \in A$ nazywamy zbiór

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{F} : a - \lambda 1 \notin \mathrm{Inv}(A)\}.$$

Prz. Widmo elementu algebry funkcji na przestrzeni zwartej M

Jeśli $A = C(M)$, to $\mathrm{Inv}(C(M)) = \{a \in C(M) : \forall_{t \in M}\, a(t) \neq 0\}$ i

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{F} : \exists_{t \in M}\ (a - \lambda 1)(t) = 0)\}$$
$$= \{\lambda \in \mathbb{F} : \exists_{t \in M}\ a(t) = \lambda\} = a(M).$$

Zatem **widmo funkcji** $a \in C(M)$ **jest obrazem tej funkcji.**

Prz. Widmo operatora działającego na przestrzeni Banacha X

Skoro $\mathrm{Inv}(B(X)) = \{T \in B(X) : T : X \to X \text{ bijekcja}\}$ to **widmo operatora** $T \in B(X)$ wyraża się wzorem

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{F} : T - \lambda 1 \text{ odwzorowanie nieodwracalne na } X\}.$$

Czyli $\lambda \in \sigma(T) \iff$ zachodzi któryś z warunków:

a) $T - \lambda 1$ nie jest injekcją $\iff \ker(T - \lambda 1) \neq \{0\} \iff \exists_{x \in X \setminus \{0\}}\ Tx = \lambda x \iff \lambda$ jest **wartością własną** dla T.

b) $T - \lambda 1$ nie jest surjekcją.

Jeśli $\dim(X) = n < \infty$, to (a) i (b) są równoważne i wtedy

$$\sigma(T) = \text{„zbiór wartości własnych operatora } T\text{''}.$$

Ponadto mamy wtedy izomorfizm algebr $B(X) \cong M_n(\mathbb{F})$ oraz $\mathrm{Inv}(M_n(\mathbb{F})) = \{T \in M_n(\mathbb{F}) : \det(T) \neq 0\}$. Zatem dla $T \in M_n(\mathbb{F})$

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{F} : \det(T - \lambda 1) = 0\}.$$

Niech $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Tw. Widmo dowolnego elementu $a \in A$ algebry Banacha A jest **niepustym zbiorem zwartym** oraz $\sigma(a) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{F} : |\lambda| \leqslant \|a\|\}$.

Dowód: Dla funkcji $F_a : \mathbb{F} \to A$, gdzie $F_a(\lambda) := a - \lambda 1$ mamy

$$\mathbb{F} \setminus \sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{F} : a - \lambda 1 \in \mathrm{Inv}(A)\} = F_a^{-1}(\mathrm{Inv}(A)).$$

Funkcja F_a jest ciągła, a zbiór $\mathrm{Inv}(A)$ jest otwarty w A. Zatem $F_a^{-1}(\mathrm{Inv}(A))$ jest zbiorem otwartym, a $\sigma(a)$ jest domkniętym w $\mathbb{F}$.

Niech $|\lambda| > \|a\| \geqslant 0$. Wtedy $\|\lambda^{-1}a\| < 1$ i z Lematu Neumanna

$$a - \lambda 1 = \underbrace{-\lambda}_{\neq 0} \underbrace{(1 - \lambda^{-1}a)}_{\in \mathrm{Inv}(A)} \in \mathrm{Inv}(A)$$

Czyli $\lambda \notin \sigma(a)$. To dowodzi inkluzji $\sigma(a) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{F} : |\lambda| \leqslant \|a\|\}$. W szczególności, widmo $\sigma(a)$ jest zwarte (domknięte i ograniczone).

Załóżmy nie wprost, że $\sigma(a) = \emptyset$. Wtedy $R_a(\lambda) = (a - \lambda 1)^{-1}$ jest funkcją zdefiniowaną na całej płaszczyźnie zespolonej:

$$R_a : \mathbb{C} \to A.$$

Ponadto funkcja $R_a(\lambda) = (a - \lambda 1)^{-1}$ ma następujące własności:

1. R_a jest różniczkowalna, jako złożenie funkcji różniczkowalnych $F_a(\lambda) = a - \lambda 1 \in A$ oraz $\mathrm{Inv}(A) \ni b \mapsto b^{-1} \in \mathrm{Inv}(A)$.
2. R_a zbiega do zera w nieskończoności, bo dla $|\lambda| > \|a\|$ mamy

$$\|R_a(\lambda)\| = \|(a - \lambda 1)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|}\|(1 - \lambda^{-1}a)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|}\|\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^{-1}a)^n\|$$

$$\leqslant \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\|\lambda^{-1}a\|^n = \frac{1}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{1-|\lambda|^{-1}\|a\|} = \frac{1}{|\lambda|-\|a\|} \xrightarrow{|\lambda|\to\infty} 0.$$ Dla dowolnego funkcjonału $f \in A^*$, na mocy 1), 2) funkcja

$$\mathbb{C} \ni \lambda \longmapsto f(R_a(\lambda)) \in \mathbb{C}$$

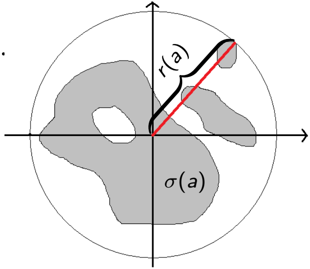
jest różniczkowalna w sensie zespolonym (a więc analityczna) i znika w nieskończoności. Zatem na mocy **Twierdzenia Liouville'a** funkcja ta jest stała i równa zero. Jako że funkcjonały z A^* rozdzielają elementy A, otrzymujemy, że $R_a(\lambda) = 0$ dla $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$R_a \equiv 0.$$

Ale zero nie może być elementem odwracalnym. ■

Def. Promieniem spektralnym elementu $a \in A$ nazywamy

$$r(a) = \max_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$



$r(a)$ to najmniejszy promień koła o środku w zerze, w którym zawarte jest całe widmo $\sigma(a)$.

Tw. (Wzór Beurlinga-Gelfanda-Naimarka)

Promień spektralny elementu $a \in A$ wyraża się wzorem

$$r(a) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Dowód: Niech $\lambda \in \sigma(a)$. Wtedy $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ i stąd $|\lambda|^n \leqslant \|a^n\|$ na mocy **Tw.** Czyli $|\lambda| \leqslant \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ i stąd

$$r(a) \leqslant \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \liminf_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Zatem wystarczy pokazać, że

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r(a).$$

Przypomnijmy, że $\mathbb{C} \setminus \sigma(a) \ni \lambda \longmapsto R_a(\lambda) = (a - \lambda 1)^{-1} \in \mathrm{Inv}(A)$ jest różniczkowalna. Zatem kładąc $\Delta := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(a)\}$ dla dowolnego $f \in A^*$ funkcja

$$\mathbb{C} \setminus \Delta \ni \lambda \longmapsto f(R_a(\lambda)) \in \mathbb{C}$$

jest holomorficzna, czyli posiada rozwinięcie postaci

$$f(R_a(\lambda)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n \lambda^{-n}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Delta,$$

gdzie $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, są pewnymi ustalonymi współczynnikami. Korzystając z Lematu Neumanna, jeśli $|\lambda| > \|a\|$, to

$$R_a(\lambda) = (a - 1\lambda)^{-1} = -\lambda^{-1}\left(1 - \lambda^{-1}a\right)^{-1}$$
$$= -\lambda^{-1} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda^{-1}a\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} -a^{n-1}\lambda^{-n}.$$

Stąd $f(R_a(\lambda)) = \sum_{n=1}^{\infty} f(-a^{n-1})\lambda^n$, czyli

$$\lambda_n = f(-a^{n-1}), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zatem dla każdego $|\lambda| > r(a)$ szereg

$$f(R_a(\lambda)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n \lambda^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} f(-a^{n-1})\lambda^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} f(-a^{n-1}\lambda^{-n})$$

jest zbieżny. W szczególności ciąg $\{f(a^{n-1}\lambda^{-n})\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do zera. Skoro zachodzi to dla dowolnego funkcjonału $f \in A^*$, to ciąg $\{a^{n-1}\lambda^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ jest słabo zbieżny do zera, a więc ograniczony na mocy Twierdzenia Banacha-Steinhausa. Zatem

$$r(a) < |\lambda| \Longrightarrow \exists_{M>0}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \|a^n\lambda^{-n}\| \leqslant M$$

$$\Longrightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant M^{\frac{1}{n}}|\lambda| \Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant |\lambda|.$$

Stąd $\limsup\limits_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r(a)$. ∎